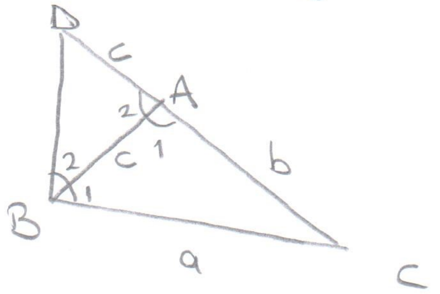
24.01.2019

MAT 333 GEOMETRİ BÜTÜNLEME SINAVI
CEVAP ANAHTARI

1) Üçgen eşitsizliğini ifade ve ispat ediniz.

ÇÖZÜM: Bir üçgende bir kenarın uzunluğu diğer iki kenarın uzunlukları toplamından küçük, farkının mutlak değerinden büyüktür.



$|b-c| < a < b+c$?

$|AD| = c$ olacak şekilde bir D noktası alalım. $A\hat{B}D$ üçgeni bir ikizkenar üçgendir.

Dolayısıyla $m(\hat{D}) = m(\hat{B}_2)$

$\Rightarrow m(\hat{B}_2) + m(\hat{B}_1) = m(D\hat{B}C)$

$\Rightarrow m(\hat{B}_2) < m(D\hat{B}C)$ // Bir üçgende küçük açı karşısında küçük kenar bulunur!

$\Rightarrow c < b+c$

$m(\hat{D}) < m(D\hat{B}C)$ // //

$\Rightarrow a < b+c$

Benzer şekilde $b < a+c$ ve $c < a+b$ olduğu da gösterilebilir.

$$\left.\begin{array}{l} b < a+c \Rightarrow b-c < a \\ c < a+b \Rightarrow c-b < a \end{array}\right\} |b-c| < a$$

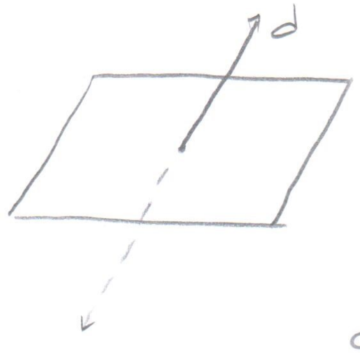
$\Rightarrow |b-c| < a < b+c$ elde edilir.

2) Bir doğru içinde bulunmadığı düzlemi keserse arakesit tek bir noktadır, gösteriniz.

Çözüm: Hipotez: d bir doğru, E bir düzlem

d, E nin dışında

Hüküm: $d \cap E = \{A\}$ ise A birtektir.



$d \cap E = \{A\}$, $d \cap E = \{B\}$

Bir an için doğrunun düzlemi A dan başka B noktasında da kestiğini düşünelim. Bu taktirde

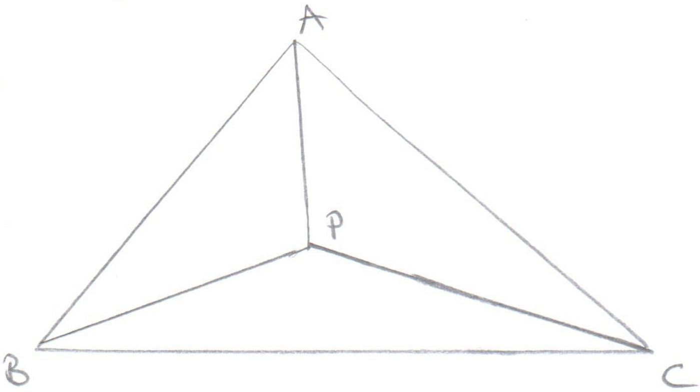
$d \cap E = \{A\}$ $\quad$ $d \cap E = \{B\}$

$d \cap E = \{A\} \Rightarrow$ $A \in d$ $\quad$ $A \in E$

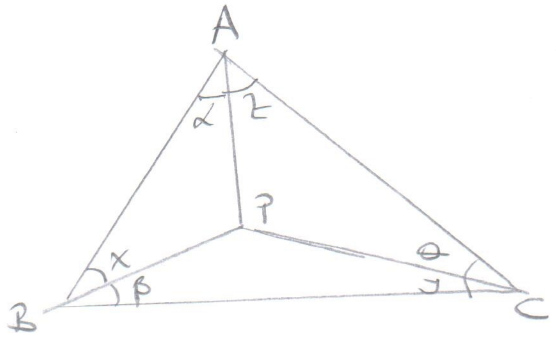
$d \cap E = \{B\} \Rightarrow$ $B \in d$ $\quad$ $B \in E$

yazılır. Bu ise "Bir doğrunun farklı iki noktası bir düzlemin içinde ise doğruda o düzlemin içinde kalır" aksiyomu gereğince d nin içinde olduğunu gösterir. Bu hipotezle çelişir. A birtektir.

3.



$$\frac{\sin(P\hat{A}B)}{\sin(P\hat{B}A)} \cdot \frac{\sin(P\hat{B}C)}{\sin(P\hat{C}B)} \cdot \frac{\sin(P\hat{C}A)}{\sin(P\hat{A}C)} = 1$$



$\overset{\triangle}{PAB}$ üçgenine sinüs teo

$$\frac{|PB|}{\sin\alpha} = \frac{|AP|}{\sin x}$$

$\overset{\triangle}{PBC}$ üçgenine sinüs teo $\quad \dfrac{|PC|}{\sin\beta} = \dfrac{|BP|}{\sin y}$

$\overset{\triangle}{APC}$ 〃 〃 $\quad \dfrac{|AP|}{\sin\theta} = \dfrac{|PC|}{\sin z}$

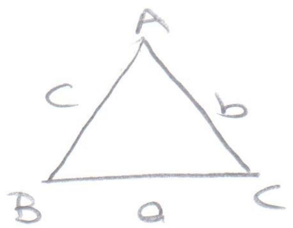
Taraf tarafa çarparsak

$$\frac{|BP|}{\sin\alpha} \cdot \frac{|PC|}{\sin\beta} \cdot \frac{|AP|}{\sin\theta} = \frac{|AP|}{\sin x} \cdot \frac{|BP|}{\sin y} \cdot \frac{|PC|}{\sin z}$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin x} \cdot \frac{\sin\beta}{\sin y} \cdot \frac{\sin\theta}{\sin z} = 1$$

$$\frac{\sin(P\hat{A}B)}{\sin(P\hat{B}A)} \cdot \frac{\sin(P\hat{B}C)}{\sin(P\hat{C}B)} \cdot \frac{\sin(P\hat{C}A)}{\sin(P\hat{A}C)} = 1$$

4- Heron's Formülünü yazınız ve ispat ediniz.



$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\Delta = \frac{1}{2} bc \sin A$$

$$\Delta^2 = \frac{1}{4} b^2c^2 \sin^2 A$$

$$= \frac{1}{4} b^2c^2(1-\cos^2 A)$$

Kosinüs teoreminden

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \text{yazılır.}$$

$$\Delta^2 = \frac{1}{4} b^2 c^2 \left(1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)^2\right)$$

$$= \frac{1}{4} \cancel{b^2 c^2} \left(\frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2}\right)$$

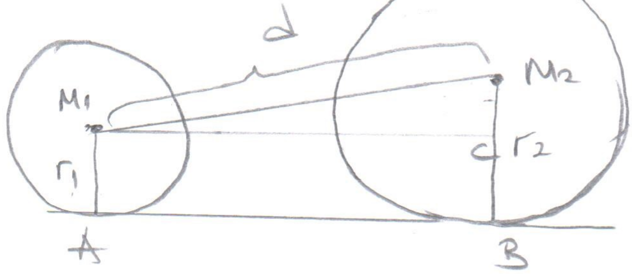
$$= \frac{1}{16} (2bc - b^2 - c^2 + a^2)(2bc + b^2 + c^2 - a^2)$$

$$= \frac{1}{16} \left(a^2 - (b-c)^2\right)\left((b+c)^2 - a^2\right)$$

$$= \underbrace{\frac{a+b-c}{2}}_{s-c} \cdot \underbrace{\frac{a-b+c}{2}}_{s-b} \cdot \underbrace{\frac{b+c-a}{2}}_{s-a} \cdot \underbrace{\frac{a+b+c}{2}}_{s}$$

$$\Rightarrow \Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{elde edilir.}$$

5- Kesişmeyen ve yarıçap uzunlukları farklı olan iki çemberin bir ortak dış teğetlerinin değme noktaları A ve B ise |AB| uzunluğunun çemberlerin yarıçap uzunluğu ve merkez noktaları arasındaki uzunluk cinsinden ifadesini bulunuz.



$|M_1C| = x$

$|M_1M_2| = d$

$|M_1A| = r_1$

$|M_2B| = r_2$

$|M_2C| = r_2 - r_1$

$$|M_1M_2|^2 = |M_2C|^2 + |M_1C|^2$$

$$d^2 = (r_2 - r_1)^2 + x^2$$

$$x = \sqrt{d^2 - (r_2 - r_1)^2}$$